

Computergestützte Numerische Integration als Unterrichtsmodul

Siegfried K. Grosser

In einer neuen Arbeit hat A. Kirsch [4] den Versuch unternommen, die Numerische Integration im MU aus der Geometrie der Parabel herzuleiten bzw. sie didaktisch besser zu motivieren, als dies in der Vergangenheit in der Schulbuchliteratur wohl allorts geschehen ist. Dabei zitiert er die durchaus verständliche Feststellung von W. Riemer [5], daß in Schulen, in denen sich die Informatik etabliert hat, die Numerik „stirbt“. Diese Besorgnis muß wohl jeder teilen, der die gewaltige Rechenkraft der neuesten Kleinrechner und die daraus resultierende Novellierung des numerischen Elements im MU richtig einschätzt.

Diese durchaus realistische Einschätzung der Lage hat den Autor bewogen, eine frühere Arbeit zu einem Vortrag über dieses Thema (siehe [3]), der einen recht faßlichen Zugang zu den klassischen Verfahren der N.I. durch Approximation mit stückweise konstanten Funktionen anstelle von Parabelsegmenten skizzierte, dahingehend zu erweitern und zu ergänzen, daß gerade die Computermathematik dazu eingesetzt wird, einen didaktisch und vor allem auch mathematisch angereicherten Unterrichtsmodul zu schaffen und vorzustellen.

Es ist wohl mehr als ein „glücklicher Zufall“, daß hierbei vor allem die Integration von Funktionen bzw. die Bestimmung von Größen begreifbar werden kann, die an anderer Stelle im MU eine zentrale Rolle spielen: Gauß'sche Glockenkurve und Φ -Funktion, Logarithmusfunktion, Definition und Berechnung von π . Die mathematische Absicherung der Genauigkeit der Ergebnisse — ein fast immer stiefmütterlich oder überhaupt nicht behandeltes Thema — geschieht dabei über die computergestützte eingebaute Benutzung einer interessanten Variante des Extremwertkalküls, der hier ebenfalls zu einer bislang nicht möglich gewesen Anwendung gelangt. Die Grundlage dieser Anwendung ist freilich das Vorhandensein einer anwenderfreundlichen Version der symbolischen Integration; hier ist man z.B. mit DERIVE, sogar in der etwas eingeschränkten Version des neuen Taschenrechners TI 92 gut bedient.

Von den bekannten Verfahren der Numerischen Integration wurden vom Autor in [3] zum Zwecke der Demonstration der Methode und zu Vergleichszwecken die folgenden vier ausgewählt:

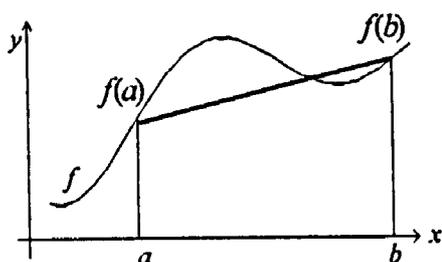
[TR]	Trapezmethode	[RE]	Rechtecksmethode
[SI]	Simpson-Verfahren	[GA]	Gauß'sche Regel („Pulcherrima“)

Das hier verwendete Computerprogramm, das mit MATHEMATICA verknüpft ist, wurde von Mag. J. Graßberger realisiert, dem ich auch für die Erstellung der Graphiken und Tabellen danken möchte.

§ 1 Kurzbeschreibung der vier Verfahren

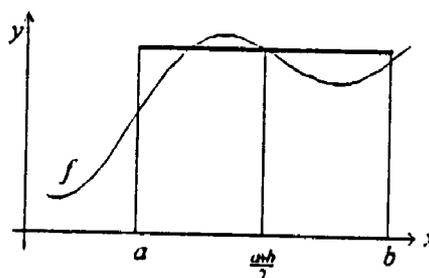
Bei der Formulierung der Verfahren in ihrer einfachsten Version wird f zunächst auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ von einer jeweils geeignet gewählten stückweise konstanten Funktion – in der Folge „Figur“ genannt – approximiert. Für die vier gewählten Verfahren sieht diese einfachste Version folgendermaßen aus:

[TR]



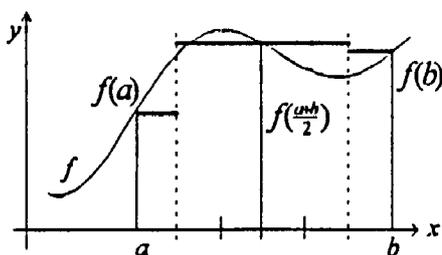
$$FL_{TR}(f, [a, b]) = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

[RE]



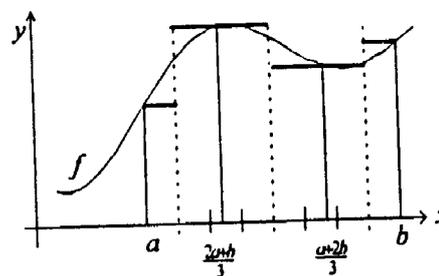
$$FL_{RE}(f, [a, b]) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

[SI]



$$FL_{SI}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

[GA]



$$FL_{GA}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{8} [f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)]$$

Die zugehörigen Flächenformeln, bei deren Berechnung nur jeweils Rechtecke oder Trapeze auftreten, lauten:

$$[TR] \quad FL_{TR}^n(f, [a, b]) = \frac{b-a}{n} [(y_0 + y_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} J_i]$$

$$[RE] \quad FL_{RE}^{(n)}(f, [a, b]) = 2 \frac{b-a}{n} [\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} y_{2i-1}] \quad \boxed{n \equiv 0(2)}$$

$$[SI] \quad FL_{SI}^{(n)}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{3-n} [(y_0 + y_n) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2i}], \quad \boxed{n \equiv 0(2)}$$

$$[GA] \quad FL_{GA}^{(n)}(f, [a, b]) = \frac{3(b-a)}{8n} [(y_0 + y_n) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} y_{3i} + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} (y_{3i+1} + y_{3i+2})]$$

$$\boxed{n \equiv 0(3)}$$

Bei dieser Formulierung sind die jeweils auftretenden Flächen automatisch mit dem richtigen Vorzeichen versehen, also signiert.

Im zweiten Schritt wird ein gegebenes Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle eingeteilt, auf die obige Formeln anwendbar sind; dabei ist es meist üblich, nicht die Anzahl der Teilintervalle, sondern ihre Länge h als Variable zu verwenden. Da die Rechnungen ohnehin auf dem Rechner oder Computer durchgeführt werden, spielt es keine Rolle, welche Variante gewählt wird. Dieses Argument zusammen mit dem nochmaligen Hinweis, daß die Approximation jeweils durch stückweise konstante Funktionen (also „Figuren“) erfolgt, möge die folgenden Versionen der 4 Formeln, bei der Bruchzahlen vermieden werden, didaktisch etwas ansprechender erscheinen lassen als eine Formulierung mit Hilfe der Teilintervalllänge.

Im allgemeinen Fall gehen wir folgendermaßen vor:

[TR] Auf den Teilintervallen $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ werden n Figuren plaziert.

[RE] Auf den Teilintervallen $[x_0, x_1, x_2], [x_2, x_3, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ werden $\frac{n}{2}$ Figuren plaziert, wo $n \equiv 0(2)$.

[SI] Auf den Teilintervallen $[x_0, x_1, x_2], [x_2, x_3, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ werden $\frac{n}{2}$ Figuren plaziert, wo $n \equiv 0(2)$.

[GA] Auf den Teilintervallen $[x_0, x_1, x_2, x_3], [x_3, x_4, x_5, x_6], \dots, [x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ werden $\frac{n}{3}$ Figuren plaziert, wo $n \equiv 0(3)$.

Das ergibt folgendes Resultat.

Satz 1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gelten die Formeln:

$$FL_{TR}^{(n)}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{n} [(y_0 + y_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i] \quad [TR]$$

$$FL_{RE}^{(n)}(f, [a, b]) = 2 \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n/2} y_{2i-1}, \quad n \equiv 0(2) \quad [RE]$$

$$FL_{SI}^{(n)}(f, [a, b]) = \frac{b-a}{3n} [(y_0 + y_n) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} y_{2i}], \quad \text{wo } n \equiv 0(2) \quad [SI]$$

$$FL_{GA}^{(n)}(f, [a, b]) = \frac{3(b-a)}{8n} [(y_0 + y_n) + 2 \sum_{i=1}^{n/3-1} y_{3i} + 3 \sum_{i=1}^{n/3-1} (y_{3i+1} + y_{3i+2})], \quad \text{wo } n \equiv 0(3) \quad [GA]$$

Es gibt interessante Relationen zwischen diesen Formeln. So gilt z.B. die Beziehung (siehe [4]):

$$FL_{SI}^{(2n)} = \frac{1}{3} FL_{TR}^{(2n)} + \frac{2}{3} FL_{RE}^{(2n)}.$$

Das ist insofern besonders bemerkenswert, als sich bei genauerer Untersuchung herausstellt (siehe § 2), daß [SI] in einem wohldefinierten Sinn genauer ist als [TR] oder [RE].

§ 2 Die zugehörigen Fehlerabschätzungen

In der vorher schon zitierten Arbeit [3] wurde auf die exakte Herleitung der Fehlerabschätzungen besonderen Wert gelegt und es wurde darauf hingewiesen, daß es besonders die Abschätzung der Genauigkeit bzw. Kontrollierbarkeit der Resultate ist, welche der N.I. — wie auch jedem anderen Verfahren — erst ihren mathematischen Stellenwert innerhalb ihrer Anwendungsgebiete sichert. Das mathematische Rüstzeug dafür umfaßt die Mittelwertsätze der Differential- und der Integralrechnung samt Verschärfungen sowie eine Version der Taylor-Formel (mit endlich vielen Termen) für n -mal stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$, wobei in unseren Fällen $n = 2$ (für [TR] bzw. [RE]) und $n = 4$ (für [SI] bzw. [GA]) erforderlich ist.

So werden zunächst Abschätzungen für den einfachsten Fall ($n = 1$) gegeben, die dann (siehe [3]) auf n Intervalle verallgemeinert werden, wobei M_2 bzw. M_4 eine obere Schranke für $|f^{II}(x)|$ bzw. $|f^{IV}(x)|$ auf $[a, b]$ bezeichnet. Die entsprechenden Resultate lauten dann folgendermaßen. (Das ist genau Satz B aus [2]; er wird noch einmal genau zitiert, weil die frühere Version leider 2 Druckfehler aufweist).

SATZ 2. Sei f auf einem offenen Intervall, das $[a, b]$ enthält, 2 mal bzw. 4 mal stetig differenzierbar, und seien M_2 bzw. M_4 die Maxima von $|f''|$ bzw. $|f^{(IV)}|$ auf $[a, b]$. Dann gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$[TR]_s \quad \left| \int_a^b -FL_{TR}^{(n)}(f, [a, b]) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}$$

$$[RE] \quad \left| \int_a^b -FL_{RE}^{(n)}(f, [a, b]) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}, \text{ wo } n \equiv 0(2)$$

$$[SI] \quad \left| \int_a^b -FL_{SI}^{(n)}(f, [a, b]) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^5}{45n^4}, \text{ wo } n \equiv 0(2)$$

$$[GA] \quad \left| \int_a^b -FL_{GA}^{(n)}(f, [a, b]) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^5}{10n^4}, \text{ wo } n \equiv 0(3).$$

Aus diesen Formeln sieht man sofort, daß $[TR]$ und $[RE]$ für lineare Funktionen, $[SI]$ und $[GA]$ sogar für Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 exakte Resultate liefern.

§ 3 Effektive Algorithmisierung über symbolische Differentiation und Extremwertkalkül

Die im Vergleich zum Beweis von Satz 1 viel schwierigere Herleitung der Abschätzungen von Satz 2, zeigt den Stellenwert dieser Resultate im Rahmen der Theorie der Numerischen Integration an. Die Verwendbarkeit der Abschätzungen hängt aber von der Bestimmung der Größen M_2 bzw. M_4 ab, die man früher fast nur durch Numerische Differentiation gewinnen konnte, weshalb die Abschätzung der Genauigkeit der Resultate bedeutende Schwierigkeiten bereitete.

Hier steht jetzt die Computeralgebra zur Verfügung, mit deren Hilfe sogar die 3. bzw. 5. Ableitungen der eingegebenen Funktionen problemlos bestimmt werden können, weil das Beispielmateriale natürlich dem üblichen Schulstoff entnommen werden soll.

Bezeichnet die jeweils linke Seite in 2 den Fehler FE , so ist z.B. bei $[TR]$ n so zu bestimmen, daß

$$FE \leq FE_M,$$

wo FE_M den maximal tolerierbaren Fehler bezeichnet. Er wird dann eingehalten, wenn, bei $[TR]$,

$$\frac{M_2(b-a)^3}{6n^2} < FE_M$$

also

$$n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{6 FE_M}}$$

Analoge Bedingungen für n ergeben sich bei $[RE]$, $[SI]$, $[GR]$, wobei noch $n \equiv 0(2)$ bzw. $n \equiv 0(3)$ zu beachten ist. Die vier Bedingungen lauten:

$$[TR] \quad n > \sqrt{\frac{m_2(b-a)^3}{6 FE_M}} \qquad [RE] \quad n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{6 FE_M}}, n \equiv 0(2)$$

$$[SI] \quad n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{45 FE_M}}, n \equiv 0(2) \qquad [GA] \quad n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{10 FE_M}}, n \equiv 0(3)$$

Wie angekündigt, bestimmen wir M_2 bzw. M_4 mit dem folgenden Extremwert-Algorithmus.

$[M_2]$: Es seien x_1, x_2, \dots, x_e die Nullstellen von f''' auf einem offenen Intervall $]a_1, b_1[$ das $[a, b]$ enthält. Dann sei $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ die Teilmenge davon, die in $[a, b]$ liegt. Dann gilt

$$M_2 = \max \{|f'''(a)|, |f'''(x_{i_1})|, \dots, |f'''(x_{i_k})|, |f'''(b)|\}.$$

$[M_4]$: Man ersetze f''' durch $f^{(IV)}$; dann gilt

$$M_4 = \max \{|f^{(IV)}(a)|, |f^{(IV)}(x_{i_1})|, \dots, |f^{(IV)}(x_{i_k})|, |f^{(IV)}(b)|\}.$$

Es ist wohl einsichtig, daß sich diese beiden Algorithmen leicht mit DERIVE oder MATHEMATICA oder anderen Computeralgebraprogrammen verknüpfen lassen.

Nach Eingabe von f, a, b, a_1, b_1, FE_M berechnet das Programm in jedem der 4 Fälle das zugehörige M_2 bzw. M_4 , daraus n und schließlich $FE_{TR}^{(n)}(f, [a, b])$ bzw. die analogen Größen.

Strebt man einen Vergleich der Genauigkeit der vier Methoden an, so hat man von der gleichen Anzahl von Figuren auszugehen; d.h., daß man für ein $n \equiv 0(6)$ die Werte FE_A in den vier Fällen für $n[TR]$, $\frac{n}{2}[RE]$, $\frac{n}{2}[SI]$, $\frac{n}{3}[GA]$ ausgeben läßt. Die Resultate bergen je nach Funktionseingabe einige Überraschungen. (siehe § 5).

Ehe wir näher auf konkretes Beispielmateriale eingehen, soll noch eine nähere Begründung für die Wahl der Methoden gegeben werden, die von den in der numerischen Mathematik üblichen durchaus abweichen. Kritiker können schließlich darauf hinweisen, daß die oben zitierten Computer-Algebra-Programme natürlich auch Programme zur Numerischen Integration enthalten, die recht effizient sind. Ein Blick in das Handbuch zu MATHEMATICA etwa zeigt, daß es sich bei den Programmen zur Numerischen Integration um „black boxes“ handelt, deren Funktionsweise

undurchschaubar bleibt. (Vermutlich handelt es sich um ein durchaus übliches Konvergenzverfahren, für das mit $n \rightarrow +\infty$ iteriert wird.) Diese anwendungsorientierte Direktheit sperrt sich gegenüber jeder didaktischen Intention: weder kann der Benutzer die Fehlergröße FE_M vorgeben noch kann er oder sie die Genauigkeit der erzielten Resultate irgendwie anders überprüfen. Genau hier schließt der Einsatz der Programme zur symbolischen Differentiation, zur Nullstellenbestimmung und zur Berechnung der Maxima von $|f''|$ bzw. $|f^{(IV)}|$ die entstandene Lücke und bietet die Möglichkeit der Schaffung eines in sich geschlossenen Unterrichtsmoduls.

§ 4 Ein einfachstes Kontrollbeispiel

Fast ohne Rechenhilfen kann folgendes Beispiel [6] gerechnet werden: $I := \int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

Der exakte Wert $I = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ soll mit einer Genauigkeit von $FE_M := 0.01$ ermittelt werden. Da hier $|f''(x)|$ bzw. $|f^{(IV)}(x)|$ entweder $|\sin x|$ oder $|\cos x|$ ist, gilt $M_2 = M_4 = 1$. Aus den in § 3 zitierten Abschätzungen für FE_M folgt also:

$$[TR] \quad n \geq \sqrt{\frac{(\pi/2)^3}{6 \cdot 0.01}} = 8.03 \dots, \text{ also } n = 9$$

$$[RE] \quad n \geq \sqrt{\frac{(\pi/2)^3}{6 \cdot 0.01}} = 8.03 \dots, \text{ also } n = 10$$

$$[SI] \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{(\pi/2)^5}{45 \cdot 0.01}} = 2.14 \dots, \text{ also } n = 4$$

$$[GA] \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{(\pi/2)^5}{10 \cdot 0.01}} = 3.12 \dots, \text{ also } n = 6$$

Die Rechnungen für diese Werte sind besonders leicht:

$$[TR] FL_{TR}^{(9)} = \frac{\pi/2}{2 \cdot 9} [(\sin 0^\circ + \sin 90^\circ + 2(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \dots + \sin 80^\circ))] = 0.997,$$

also $|FL_{TR}^{(9)} - 1| < 0.003 < 0.01$

$$[RE] FL_{RE}^{(10)} = 2 \frac{\pi/2}{10} [\sin 9^\circ + \sin 27^\circ + \dots + \sin 81^\circ] = 1.0041,$$

also $|FL_{RE}^{(10)} - 1| < 0.0041 < 0.01$

$$[SI] FL_{SI}^{(4)} = \frac{\pi/2}{3 \cdot 4} [\sin 0^\circ + \sin 90^\circ + 4(\sin 22.5^\circ + \sin 67.5^\circ) + 2 \sin 45^\circ] = 1.0001$$

also $|FL_{SI}^{(4)} - 1| < 0.0001$

$$[GA] FL_{GA}^{(6)} = 3 \frac{\pi/2}{8 \cdot 6} [\sin 0^\circ + \sin 90^\circ + 2 \sin 45^\circ + 3(\sin 15^\circ + \sin 30^\circ + \sin 60^\circ + \sin 75^\circ)] = 1.00006,$$

also $|FL_{GA}^{(6)} - 1| < 0.00006 < 0.01$.

§ 5 Ein unangenehmes – aber lehrreiches – Beispiel

Man berechne $I := \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} dx$. Das Integral kann nach dem Fundamentalsatz nicht berechnet werden, da für $f(x) = e^{\cos x}$ keine Stammfunktion (in „geschlossener“ Form) angegeben werden kann.

Berechnet man I zunächst direkt aus MATHEMATICA mit dem Befehl „INTEGRATE“, so erhält man $I = 3.10438$; aber keinen direkten Hinweis darauf, wie viele Stellen gültig sind.

Wir berechnen nun zunächst, unter Einsatz des vollen Programmpakets, das mit MATHEMATICA zu diesem Zweck verknüpft wurde, die analogen Werte für I aufgrund der folgenden Vorgaben:

Programm	[TR]	[RE]	[SI]	[GA]
	10	20	20	30
Wir erhalten	3.108	3.104	3.1044	3.1044

Nun soll I mit der Genauigkeit $FE_M = 0.0001$ gerechnet werden.

Aus den Ungleichungen für n in § 3 und unter Verwendung dieser n im Programm erhält man

[TR]	$n = 133$	$I = 2.937$
[RE]	$n = 134$	$I = 2.972$
[SI]	$n = 14$	$I = 3.104379$
[GA]	$n = 18$	$I = 3.104379$

Die beiden ersten Werte sind sicher falsch. Man kann hier vermuten, daß der Integrand, $f(x) = e^{\cos x}$, der durch Schachtelung von zwei transzendenten Funktionen entsteht, bei Summation über viele Funktionswerte (hier $n = 133$ bzw. $n = 134$) zu großen Ungenauigkeiten in die Summation Anlaß gibt. Bei [SI] und [GA] sind diese Schwierigkeiten offenbar hier nicht vorhanden. (Aber [SI] z.B. versagt ebenfalls bei größerem n , etwa $n = 100$).

§ 6 Die Integral-Funktion der Normalverteilung

In diesem Abschnitt soll im Anschluß an [3] noch genauer gezeigt werden, wie die obigen Techniken zu einer Vertiefung des Unterrichtsstoffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden können.

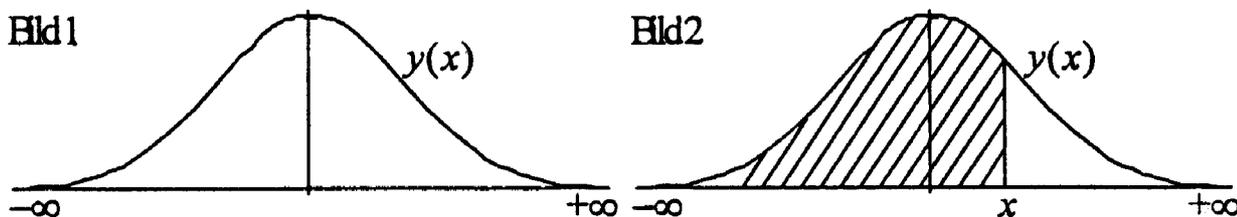
Es bezeichne $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ den Funktionsterm der Gauß'schen Normalverteilung. Dann gilt

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = 2 \int_0^{+\infty} y dx = 1,$$

und dem Schüler ist das Bild 1 bekannt. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine normalverteilte Zufallsvariable einen Wert zwischen $-\infty$ und x annimmt, ist durch

$$(**) \quad \Phi(x) := \int_{-\infty}^x y(t) dt$$

gegeben und stellt die in Bild 2 schraffierte Fläche dar.



Gemäß dem Obigen ist dann $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ und $\Phi(+\infty) = 1$ und nach dem Fundamentalsatz gilt $\Phi'(x) = y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Weder Schüler noch Schülerin haben bisher die Genugtuung erlebt, das Entstehen von Tabellen der Φ -Funktion zu erleben. Das soll nun demonstriert werden.

Einige Bemerkungen sind vor auszuschicken. Es gilt wegen der Symmetrie von $y(x)$ die Beziehung

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \text{ also } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Daher genügt es, solche Tabellen für $x \geq 0$ aufzustellen. Aus dieser Situation kann man die folgende allgemeine Lehre ziehen.

PROPOSITION A. Ist f symmetrisch bezüglich der y -Achse und $\Phi(x) := \int_0^x f$ die Integralfunktion von f , so ist $\Phi - \Phi(0)$ schiefsymmetrisch.

Analog, aber etwas leichter durchschaubar ist die Situation bei den Ableitungen der symmetrischen Funktion $y(x)$. Läßt man sich $y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), y^{(IV)}(x)$ graphisch darstellen, so erlebt man ein Alternieren nach dem Schema symmetrisch - schiefsymmetrisch. Das suggeriert das Analogon zu Proposition A.

PROPOSITION B. *Ist f symmetrisch oder schiefsymmetrisch bezüglich der y -Achse, so ist f' schiefsymmetrisch oder symmetrisch, und Analoges gilt für f'' , f''' etc.*

Gute Schüler, die gelernt haben, mit Funktionstermen zu hantieren, werden in der Lage sein, diese Aussagen formal zu beweisen.

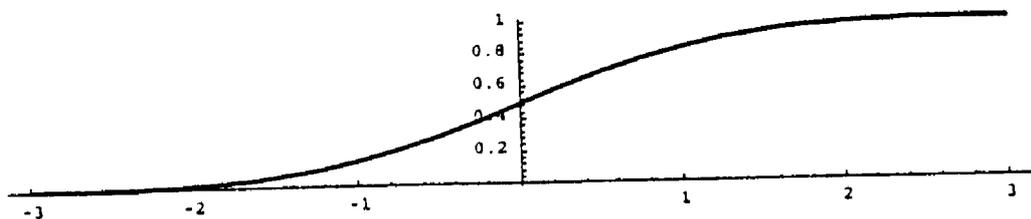
Nun soll die gesuchte Tabelle für $\Phi(x)$ unter folgenden Vorgaben bestimmt werden:

$$-3 \leq x \leq 3, \quad \Delta x = 0.25 \quad (\text{Schrittweite})$$

$$FE_M := 0.00001, \quad [SI] : n = 30 \quad (\text{Tabelle 1})$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
-3	0.001349942296130299	0.00	0.5
-2.75	0.002979808023189479	0.25	0.5987063256905319
-2.5	0.006209703563741565	0.5	0.6914624614815591
-2.25	0.01222449863030384	0.75	0.7733726488181834
-2.00	0.02275014385460217	1.00	0.841344749389075
-1.75	0.040059157495489	1.25	0.894350231830214
-1.5	0.06680719621448989	1.5	0.93319280378551
-1.25	0.1056497681697864	1.75	0.959940842504511
-1.00	0.1586552506109249	2.00	0.977249856145398
-0.75	0.2266273511818166	2.25	0.987775501369696
-0.5	0.308537538518441	2.5	0.993790296436258
-0.25	0.4012936743094682	2.75	0.99702019197681
		3.00	0.99865005770387

$$FE_M := 0.0000000001, \quad [SI] : n = 506 \quad (\text{Tabelle 2})$$

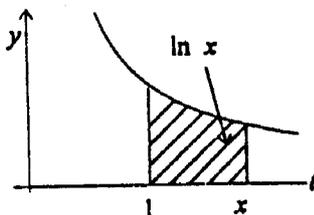


Natürlich ist vorher noch zu prüfen, ob die Voraussetzungen für die Anwendung des Programms gegeben sind. Durch einige elementare Überlegungen sieht man, daß M_2 und M_4 nach Bestimmung der 0-Stellen von Polynomgleichungen durch das Programm leicht zu eruiieren sind.

§ 7 Wertetabellen der Logarithmusfunktion

Als Definition des Logarithmus hat sich fast überall die über das Riemann-Integral durchgesetzt:

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$



Aus ihr werden durch Anwendung des Fundamentalsatzes und der Substitutionsregel alle wichtigen Eigenschaften dieser Funktion schnell hergeleitet. (Daraus folgen die Definition und die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = \exp x = e^x$ durch Anwendung der Sätze über Existenz und Eigenschaften von Umkehrfunktionen).

Will man etwa $\ln 2$ berechnen, so genügt bei Anwendung von [SI] für $FE_M := 10^{-10}$ die Annahme $n = 396$. Die anderen Voraussetzungen für die Anwendung der Formeln von § 3 sind bei dem einfachen Integranden $f(t) = \frac{1}{t}$ in idealer Weise erfüllt. Das Resultat ist $\ln 2 = 0,69314785 \dots$

Allein schon wegen dieses Resultats lohnt sich ein Blick auf die früher übliche Methodik der Berechnung von Logarithmustabellen. Da wurde die Logarithmusfunktion aus der Exponentialfunktion entwickelt und ihre Reihenentwicklung $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} (-1)^k$ für $|x| < 1$ hergeleitet. Da diese alternierende Reihe unsäglich schlecht konvergiert, leitete man durch geeignete Substitution die einigermaßen rasch konvergierende Rekursionsformel

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

her, aus der in mühevoller Arbeit Tafeln berechnet werden konnten.

Die Auswertung der jetzt favorisierten Integraldefinition mittels numerischer Integration stellt hier einen gewaltigen Fortschritt dar. Ist nämlich eine Logarithmustabelle für das Intervall $[a, b]$ mit Schnittwerte Δx zu berechnen, so sieht man sogar direkt, daß $M_2 = 2!/a^3$, $M_4 = 4!/a^5$ (für das ganze Intervall). Für $[a, b] = [1, 20]$, $\Delta x := 0,25$, $FE_M := 0,00001$ ergibt sich bei Anwendung von [SI] der Wert $n = 604$, bei [GA] $n = 879$ und daraus die folgenden Tabellen bzw. Bilder. Sie gelten für $[\frac{1}{20}, 20]$, weil man aufgrund der Formel $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ sofort auch die Werte im Intervall $[\frac{1}{20}, 1]$ dazu erhält.

x	$\ln x$	x	$\ln x$
0.05	-2.99574	0.1	-2.30259
0.0506329	-2.98316	0.102564	-2.27728
0.0512821	-2.97042	0.105263	-2.2513
0.0519481	-2.95752	0.108108	-2.22463
0.0526316	-2.94445	0.111111	-2.19723
0.0533333	-2.9312	0.114286	-2.16906
0.0540541	-2.91778	0.117647	-2.14007
0.0547945	-2.90417	0.121212	-2.11022
0.0555556	-2.89038	0.125	-2.07945
0.056338	-2.87639	0.129032	-2.0477
0.0571429	-2.86221	0.133333	-2.01491
0.057971	-2.84782	0.137931	-1.98101
0.0588235	-2.83322	0.142857	-1.94592
0.0597015	-2.81841	0.148148	-1.90955
0.0606061	-2.80337	0.153846	-1.87181
0.0615385	-2.7881	0.16	-1.83259
0.0625	-2.7726	0.166667	-1.79177
0.0634921	-2.75685	0.173913	-1.74921
0.0645161	-2.74085	0.181818	-1.70476
0.0655738	-2.72459	0.190476	-1.65824
0.0666667	-2.70806	0.2	-1.60945
0.0677966	-2.69125	0.210526	-1.55815
0.0689655	-2.67416	0.222222	-1.50409
0.0701754	-2.65676	0.235294	-1.44693
0.0714286	-2.63907	0.25	-1.3863
0.0727273	-2.62105	0.266667	-1.32176
0.0740741	-2.6027	0.285714	-1.25277
0.0754717	-2.58401	0.307692	-1.17866
0.0769231	-2.56496	0.333333	-1.09862
0.0784314	-2.54554	0.363636	-1.01161
0.08	-2.52574	0.4	-0.916298
0.0816327	-2.50553	0.444444	-0.810938
0.0833333	-2.48491	0.5	-0.693155
0.0851064	-2.46386	0.571429	-0.559623
0.0869565	-2.44235	0.666667	-0.405471
0.0888889	-2.42038	0.8	-0.223148
0.0909091	-2.3979		
0.0930233	-2.37491		
0.0952381	-2.35138		
0.097561	-2.32729		

x	$\ln x$	x	$\ln x$
1.00	0.00	11.00	2.3979
1.25	0.223148	11.25	2.42038
1.5	0.405471	11.5	2.44235
1.75	0.559623	11.75	2.46386
2.00	0.693155	12.00	2.48491
2.25	0.810938	12.25	2.50553
2.5	0.916298	12.5	2.52574
2.75	1.01161	12.75	2.54554
3.00	1.09862	13.00	2.56496
3.25	1.17866	13.25	2.58401
3.5	1.25277	13.5	2.6027
3.75	1.32176	13.75	2.62105
4.00	1.3863	14.00	2.63907
4.25	1.44693	14.25	2.65676
4.5	1.50409	14.5	2.67416
4.75	1.55815	14.75	2.69125
5.00	1.60945	15.00	2.70806
5.25	1.65824	15.25	2.72459
5.5	1.70476	15.5	2.74085
5.75	1.74921	15.75	2.75685
6.00	1.79177	16.00	2.7726
6.25	1.83259	16.25	2.7881
6.5	1.87181	16.5	2.80337
6.75	1.90955	16.75	2.81841
7.00	1.94592	17.00	2.83322
7.25	1.98101	17.25	2.84782
7.5	2.01491	17.5	2.86221
7.75	2.0477	17.75	2.87639
8.00	2.07945	18.00	2.89038
8.25	2.11022	18.25	2.90417
8.5	2.14007	18.5	2.91778
8.75	2.16906	18.75	2.9312
9.00	2.19723	19.00	2.94445
9.25	2.22463	19.25	2.95752
9.5	2.2513	19.5	2.97042
9.75	2.27728	19.75	2.98316
10.00	2.30259	20.00	2.99574
10.25	2.32729		
10.5	2.35138		
10.75	2.37491		

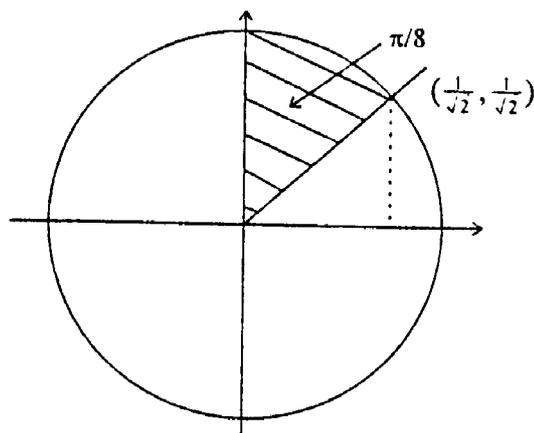
§ 8 Die Definition und Berechnung von π

Nach wie vor ein Kernproblem der Mathematik der Höheren Schulen ist eine angemessene Definition von π .

Schiebt man dabei zunächst alle mathematischen Bedenken zur Seite, etwa die ketzerische Frage, ob die Punktmenge des Kreises überhaupt eine Fläche, also ein Maß besitzt, so kann man sich der von Archimedes, Snellius, Huyghens und anderen entwickelten Rekursionsformeln bedienen und die gesuchte Größe durch die bekannten Grenzwertprozesse ermitteln [1], eine sehr mühsame Methode.

Was vom Autor in [3] vorgeschlagen und hier in mehr Detail ausgearbeitet werden soll, ist dieselbe Definition, aber eine Art Berechnung, die auf den Eigenschaften des Riemann-Integrals, den grundlegenden Eigenschaften des hier zugrundeliegenden Maßbegriffs und auf der hier vorgestellten Numerischen Integration beruht. Alle diese Begriffe gehören zur Mathematik der Höheren Schulen und sind in den Gehirnen besserer Schüler abrufbar gespeichert.

Wir definieren $\pi/8$ als die Maßzahl der in nächster Skizze schraffierten Fläche; ihre Existenz folgt aus den Eigenschaften des Riemann-Integrals.



Das heißt

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{4},$$

$$\pi = 8 \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2.$$

Es ist nicht schwer, zusehen, daß die Kreisfläche aus acht solchen disjunkten Sektoren besteht, die zueinander kongruent sind. Also ist π die Fläche des Kreises. Für diese Erkenntnis war die Einsicht in die Eigenschaft der Additivität und die Eigenschaft der Invarianz des Flächeninhalts gegenüber Kongruenz-Transformationen (hier Drehungen) notwendig.

Diese beiden „Einsichten“ sind aber schon eine Voraussetzung für das Verständnis des Flächenbegriffs gewesen, der wie der Begriff des Riemann-Integrals im Unterricht thematisiert wird.

Ein erster Versuch ergibt:

$$[TR] \quad n = 80 \quad \pi = 3.1415 \, 40 \dots$$

$$[SI] \quad n = 80 \quad \pi = 3.14159265 \, 03 \dots$$

Will man aber den wirklichen Vergleich in der Leistungsfähigkeit zwischen [TR] und [SI], so sollte man die folgende Wahl treffen:

$$[TR] \quad n = 80 \quad (80 \text{ Figuren}) \quad \pi = 3.1415 \ 40 \dots$$

$$[SI] \quad n = 80 \quad (80 \text{ Figuren}) \quad \pi = 3.14159265 \ 03 \dots$$

Aus dem Programm ergeben sich M_2 und M_4 , wie folgt

$$M_2 = 2\sqrt{2} \approx 2.822$$

$$M_4 = 72\sqrt{2} \approx 101.823$$

Der Integrand $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ ist auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ beliebig oft stetig differenzierbar; also sind die Formeln von § 3 anwendbar.

Stellen wir uns der Aufgabe, die Ludwig von Ceulen 1635 gelöst hat: π auf 35 Stellen genau zu berechnen.

Z.B. wählen wir $FE_M := 10^{-40}$. Das ergibt:

$$[SI] \quad n = 7.952.707.288$$

$$[GA] \quad n = 11.582.921.853$$

Die Ergebnisse sind

$$[SI] \quad \pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971 \ 3607$$

$$[GA] \quad \pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971 \ 5273$$

Eine Probe: MATHEMATICA gibt den folgenden Wert an (40 Stellen).

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971 \ 69399.$$

Bei der obigen Berechnung von π erweisen sich [SI] und [GA] auch als etwa gleich leistungsfähig; denn bei [SI] werden etwa $8 \cdot 10^6$ Figuren, bei [GA] etwa $12 \cdot 10^6$ Figuren benötigt, so daß das Verhältnis etwa 8:12, also 2:3 ist, was den Bedingungen $n \equiv 0(2)$ und $n \equiv 0(3)$ entspricht.

Natürlich gibt es schnellere Algorithmen für die Berechnung von π . So sei etwa auf [2] hingewiesen, wo die folgende sehr rasch konvergierende Rekursion für π mit einiger Deutlichkeit erläutert wird:

$$\text{Sei } y_1 := 4 \text{ und } y_u := 2^{n+1} y_{u-1} / [2^n + (4^n + y_{n-1}^2)^{1/2}].$$

Dann gilt $\pi = \lim_u y_u$, wobei $y_u - \pi < 4^{-(n-4)}$. Will man auf l Stellen genau berechnen, so folgt aus einer kurzen Rechnung $n > 4 + l \ln 10 / \ln 4$.

Für $l = 100$ etwa muß $n \geq 171$ gewählt werden. Dann ergibt sich π auf 104 Stellen genau:

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592 \\ 3078164062862089986280348253421170679 \ 82$$

LITERATUR

- [1]:= J. Amstler, Verschiedene Mittelwerte für zwei Zahlen und Iteration der Mittelwertbildung, Inst. f. Math., Univ. Linz, 1983, Heft 13.
- [2]:= S.K. Grosser, Definition der Zahl π und Approximationsverfahren zum Berechnen von Näherungswerten der Zahl π , Didaktikhefte der ÖMG Nr.12, 1984, p.45 - 60.
- [3]:= S.K. Grosser, Numerische Integration im Mathematikunterricht, Didaktikhefte der ÖMG Nr.16, 1988, p.32 - 42.
- [4]:= A. Kirsch, Anschauliche Begründung einiger Verfahren der numerischen Mathematik aus der Sicht der Parabel, Mathematische Semesterberichte Heft 2, 1988, p.197 - 209.
- [5]:= W. Riemer, Mathematik, Informatik, Neue Technologien - eine Standortbestimmung im Spannungsfeld zw. Inhalt, Ziel und Alltagspraxis! MNU 40, 1987, p.171 - 176.
- [6]:= C. Niemeczek, Didaktische Aspekte der numerischen Integration mit Computereinsatz Diplomarbeit, 1996, Mathematisches Institut der Universität Wien.